Динамика на идеално твърдо тяло

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\quad |\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\beta = l_2|\vec{F}|$ $\quad$ 8

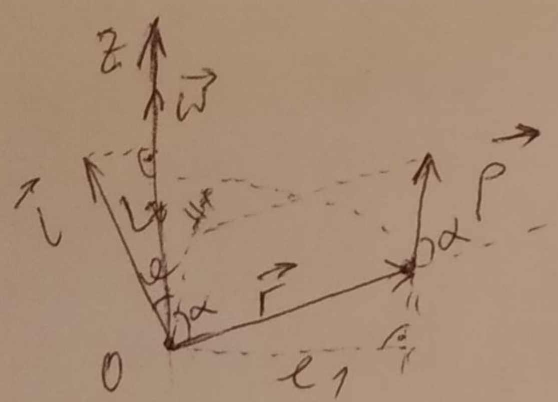
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \ \vec{p} = m\vec{v}$ $\quad |\vec{L}| = |\vec{r}||\vec{p}|\sin\alpha = l_1|\vec{p}|$

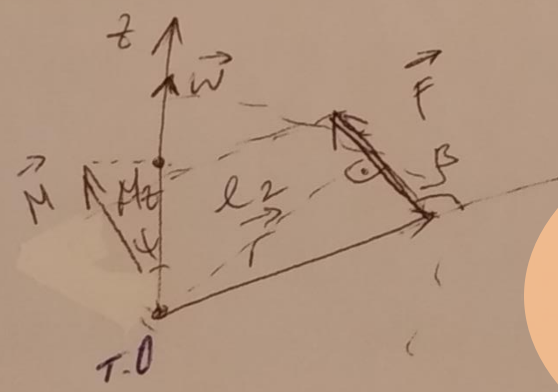
спрямо неподвижна точка (т.О)

спрямо ос „z"

$M_z = M\cos\psi$

$L_z = L\cos\varphi$





у-ние на моментите: ≡ Осн. у-ние за въртеливото дв-ние:

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ $\quad \frac{L_z}{dt} = M_z$ $\quad \left(L_z = I_z \omega_z, \ I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right)$

$I_z \beta_z = M_z$

ако $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$

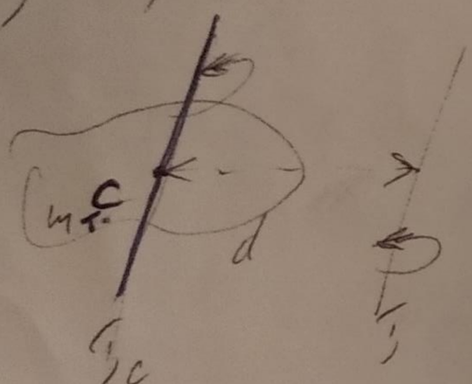
ако $M_z = 0 \Rightarrow L_z = const$, но $\vec{L}$ може да се променя, заради посоката

$\vec{L} = I\vec{\omega}$ – за хомогенно тяло и ос, спрямо която то е симетрично

$\vec{M} = I\vec{\beta}$

Теорема на Хюйгенс-Щайнер:

$I_1 = I_c + md^2$

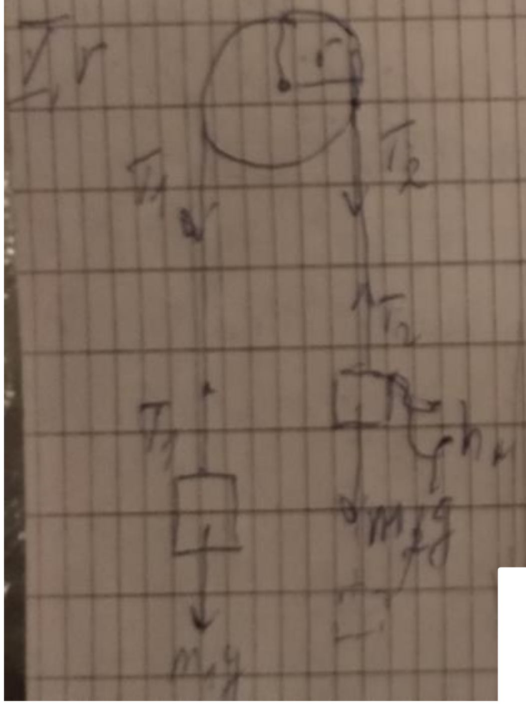


Теорема за Инерчния момент на плоско тяло спрямо ос ⊥ на р-ната му = сума от инерчните моменти спрямо две взаимно ⊥ оси, лежащи в р-ната на тялото, т.е. $I_z = I_x + I_y$

– полярна екваториални

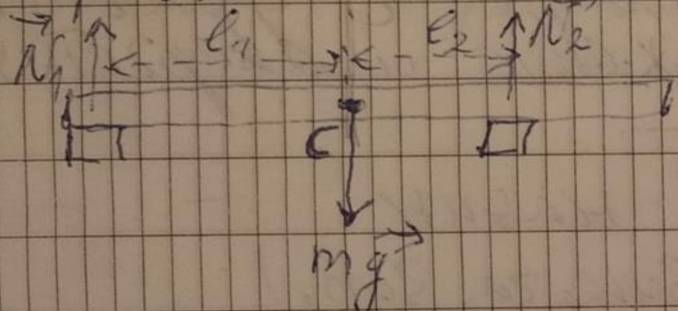
Задача 1

През макара с „I" и „r" е прехвърлена
лека неразтеглива нишка, на краищата
на които са окачени две тела с маси
„m_1" и „m_2" ($m_2 > m_1$). Системата тръгва
от покой. Определете скоростта на
телата в момента, когато височината между
тях е изменена с „h", както и уско-
рението в този момент. Триене няма.



Задача 2

1. Греда с маса 110кг лежи на две хориз. опори



Дължината на гредата е $l = 6$м. Едната опора е в единия край, а другата на 1м от другия край на гредата.

Определете силите на реакция на опорите

Задача 3

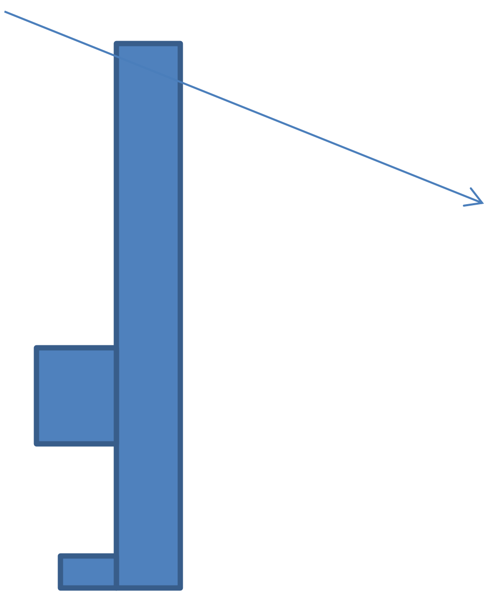
От горния край на на-ведена равнина едно-временно започват да се движат без хлъз-гане хомогенен ци-линдър и кълбо с еднакви “m” и “r”. Да се определи отноше-нието на скоростите на двете тела на едно и също хоризонтално ниво.

Задача 4

Вентилатор се върти със скорост, която съответства на честота ν = 1000 об/мин. След изключването му, въртейки се равнозакъснително, той извършва N = 100 оборота до спирането си. Работата на силите на триене е A = 50 J. Да се определи моментът на силата на триене, ако се счита за постоянен, и инерчният момент на вентилатора.

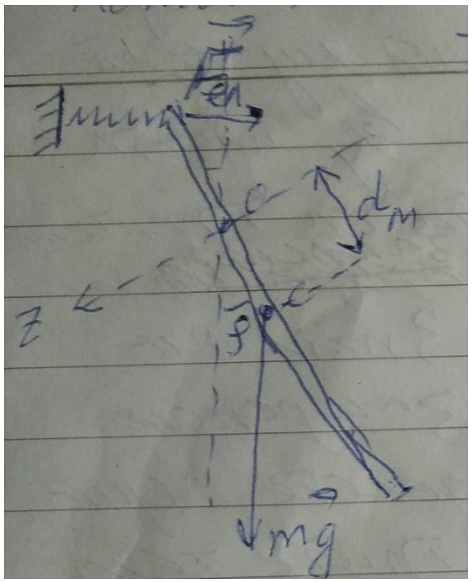
Задача 5

Хомогенен прът с дължина l може да трепти около неподвижна хоризонтална ос, минаваща през единия му край. Две малки тела са закрепени върху пръта на разстояния (2/3)l и l от оста на трептене. Масата на пръта и на тялото, закрепено на разстояние (2/3)l са 8 пъти и 3 пъти по-големи от масата на тялото, закрепено в другия край на пръта. Определете периода на трептене на системата от трите тела.



Зад. 6

Хомогенен прът с маса *m* и дължина *l* извършва малки трептения около хоризонтална ос Oz, минаваща през т.O (виж чертежа). Към горния край на пръта е прикрепена безмасова пружина с коефициент на еластичност *к*. Напишете уравнението на движение на пръта ако *I = ml^2/12*.



Хомогенен прът с маса *m* и дължина *l* извършва малки трепте-ния около хоризонтална ос Oz, минаваща през т.О (виж черте-жа). Към горния край на пръта е прикрепена безмасова пружина с коефициент на еластичност *к*. Напишете уравнението на движение на пръта ако *I = ml^2/12*.

$\omega = ?$ или $\dot{\varphi} = ?$ или $\ddot{\varphi} = \beta = ?$ $\quad d_m \to h_m$

$$I\beta = \sum_{i=1}^{n} M_i = -M_G - M_{F_{el}}, \quad F_{el} = -kx, \quad \sin\varphi \approx \varphi \approx \frac{x}{\frac{l}{2}-h_m}, \quad x = \varphi\left(\frac{l}{2}-h_m\right)$$

$$I_{ц.м} = \frac{ml^2}{12}$$

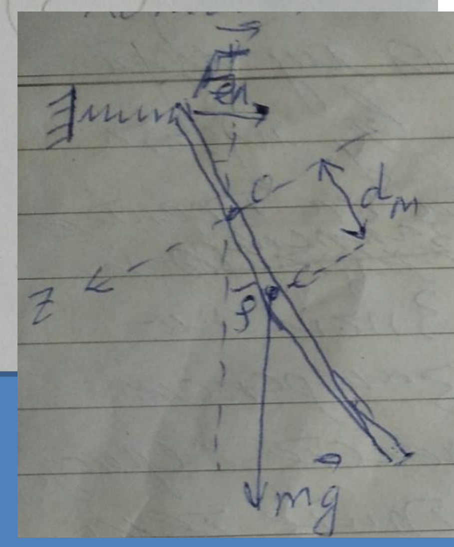
$$I_{т.О} = \frac{ml^2}{12} + mh_m^2$$

$$M_{F_{el}} = -\left(\frac{l}{2}-h_m\right)F_{el}\sin(90^\circ+\varphi) = -\left(\frac{l}{2}-h_m\right)F_{el}\cos\varphi = +\left(\frac{l}{2}-h_m\right)\left(\frac{l}{2}-h_m\right)k\varphi\cdot 1$$

$$M_G = -mgh_m\sin\varphi = -mgh_m\varphi$$

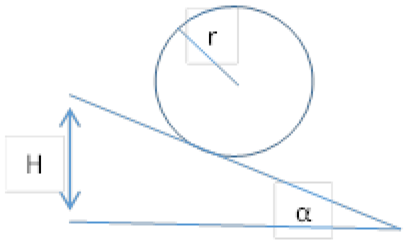
$$\left(\frac{ml^2}{12}+mh_m^2\right)\ddot{\varphi} = -\left[mgh_m + k\left(\frac{l}{2}-h_m\right)^2\right]\varphi \Rightarrow A\ddot{\varphi} = -B\varphi$$

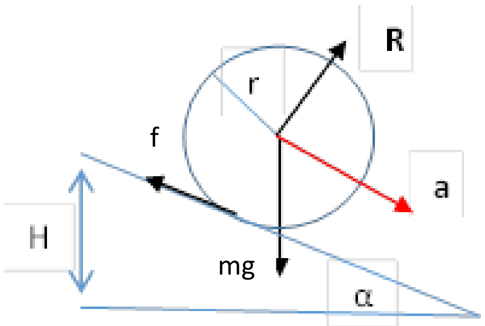
или $\omega_0 = \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\dfrac{mgh_m + k\left(\frac{l}{2}-h_m\right)^2}{\frac{ml^2}{12}+mh_m^2}}$



Зад. 7

Обръч с радиус r се търкаля без хлъзгане по наклонена плоскост с ъгъл спрямо хоризонта α , като тръгва от точка с височина H спрямо хоризонта. Намерете: а) ускорението на обръча; б) скоростта му в края на наклона; в) времето, през което се е движил по наклона; г) пътят изминат по наклона.





Решение:

а) $m\mathbf{a} = \mathbf{G} + \mathbf{R} + \mathbf{f}$ $\qquad$ $ma = mg\sin\alpha - f$

$M_z = I\beta_z$ $\qquad$ $f r = I\beta$; $\qquad$ $\beta = a/r$; $I = mr^2$

$f r = mr^2 a/r \rightarrow f = ma$

$ma = mg\sin\alpha - ma$

<u>$a = 0.5\, g\sin\alpha$</u>

б) f не върши работа, защото допирната точка е в покой във всеки момент

➔ $mgH = mV^2/2 + I\omega^2/2$

$\omega = V/r$

$mgH = mV^2/2 + mr^2 V^2/2r^2 = mV^2$

→$V = (gH)$^0.5

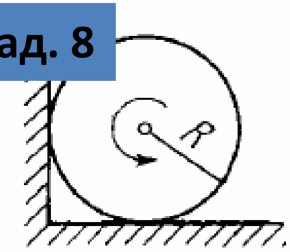
в) $V = 0 + at$ (равноускорително д-ие);

$t = V/a = 2\ (gH)$^0.5 / $g \sin\alpha$

г) $S = H/ \sin\alpha$

Хомогенен цилиндър с радиус R се завърта около своята ос до ъглова скорост w_0 и се озовава в ъгъл (виж фигурата). Коефициентът на триене между стените и цилиндъра е к. Колко оборота ще направи цилиндъра преди да спре?

Зад. 8

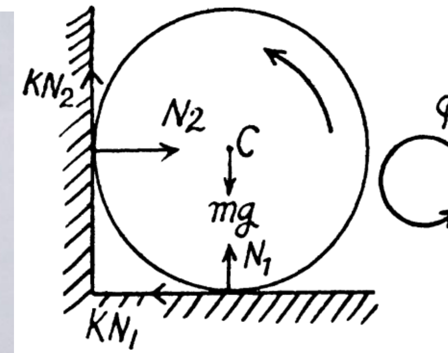


Дадено:

$R, w_0, w_{кр}=0, k$

Търси се $n=?$

$n = \Delta\varphi/2\pi$



Кинематика:

$w_{кр}^2 - w_0^2 = -2\beta\Delta\varphi \Rightarrow \beta = ?$ $\quad -w_0^2 = -2\beta\Delta\varphi, \; \Delta\varphi = +\frac{w_0^2 R(1+k^2)}{2.2.kg(1+k)} \Rightarrow n = \frac{w^2 R(1+k^2)}{8\pi kg(1+k)}$

$M_z = I\beta_z, \; I = mR^2/2$

$-kN_1R - kN_2R = -\frac{mR^2}{2}\beta \Rightarrow N_1 = ?, N_2 = ?$ $\quad +\frac{kmg}{1+k^2}R + \frac{k^2mg}{1+k^2}R = +\frac{mR^2}{2}\beta, \; \beta = \frac{+2kg(1+k)}{R(1+k^2)}$

При стационарно състояние по отношение на вертикалата и хоризонталата:

$\vec{N}_1 + k\vec{N}_2 + \vec{G} = 0$ $\qquad \vec{N}_2 + k\vec{N}_1 = 0$

$N_1 + kN_2 = mg$ $\qquad N_2 - kN_1 = 0$

$\qquad N_2 = kN_1$

$N_1 + k^2N_1 = mg$

$N_1 = \frac{mg}{1+k^2} \Rightarrow N_2 = \frac{kmg}{1+k^2}$